Домашно №2 по Дискретни Структури на специалност Компютърни науки, 2 поток, зимен семестър 2021/2022г.

Камен Димитров Младенов, Група 6

06 Януари 2022

Задача 1 **Решение:** Ще докажем равенството по индукция за n:

База: $n = 1, \quad S(1) = \sum_{X \subseteq \{1\}} \prod_{y \in X} y = \prod_{y \in \emptyset} y + \prod_{y \in 1} y = 1 + 1 = 2 \quad (1+1)! = 2! = 2$

Индукционно предположение: $S(n) = (n+1)!$ е изпълнено за поне едно $n \in \mathbb{N}^+$

Индукционна стъпка: $S(n+1) = \sum_{X \subseteq \{1,\dots,n+1\}} \prod_{y \in X} y = \sum_{X \subseteq \{1,\dots,n\}} \prod_{y \in X} y +$

$$+ \prod_{y \in \{n+1\}} y + \prod_{y \in \{1,n+1\}} y + \prod_{y \in \{2,n+1\}} y + \dots + \prod_{y \in \{n,n+1\}} y + \prod_{y \in \{1,2,n+1\}} y + \dots + \prod_{y \in \{1,\dots,n,n+1\}} y =$$

$$= \sum_{X \subseteq \{1,\dots,n\}} \prod_{y \in X} y + (n+1)\left(\prod_{y \in \emptyset} y + \prod_{y \in \{1\}} y + \prod_{y \in \{2\}} y + \dots + \prod_{y \in \{n\}} y + \prod_{y \in \{1,2\}} y + \dots + \prod_{y \in \{1,\dots,n\}} y\right) =$$

$$= \sum_{X \subseteq \{1,\dots,n\}} \prod_{y \in X} y + (n+1) \sum_{X \subseteq \{1,\dots,n\}} \prod_{y \in X} y \overset{\text{ИП}}{=\!=} (n+1)! + (n+1)(n+1)! = (n+1)!(n+1+1) = (n+2)!$$

Задача 2 **Решение:** Първо ще докажем с индукция по $n \in \mathbb{N}^+$, че за произволно попълване на квадратна таблица с размер n, броят на колоните с нечетна сума и броят на редовете с нечетна сума съвпадат по модул 2.

База: $n = 1$, Имаме една колона и един ред, които съвпадат по стойност. Ако редът е нечетен, то и колоната ще е нечетна и обратно.

Индукционно предположение: Допускаме, че е изпълнено за поне едно n

Индукционна стъпка: Разглеждаме таблица A с размер $n+1$. Разделяме я на таблица B с размер n и ред r' и колона c' с размери $n+1$ (имат една обща клетка). Твърдението е вярно за B (от ИП) и за r' и c', когато имат еднаква четност.

Разглеждаме когато r' и c' имат различна четност. Б.О.О. нека колоните и редовете с нечетна сума в B са нечетен брой, r' е с четна сума и c' е с нечетна сума. То тогава, четен брой колони от B ще станат нечетни и броят на колоните ще е: нечетно - четно = нечетно. Аналогично, бройката редове също си остава нечетна. Следователно, взаимната нечетност се запазва.

Можем да представим всяка хубава n-мерна квадратна таблица като $(n-1)$-мерна квадратна таблица с произволни стойности, към която са добавени ред и колона с размер n, чиито стойности допълват редовете и колоните до "хубавост" (за ред с нечетна сума, слагаме 1-ца и т.н.).

Знаем, че при произволно попълване, броят на колоните и редовете с нечетни суми съвпада по четност. То тогава, добавените ред и колона към $(n-1)$-мерната таблица не променят "хубавостта".

Следователно, броят на хубави таблици е броят начини да се построят $(n-1)$-мерни таблици, тоест $2^{(n-1)^2}$.

Задача 3 **Решение:** Б.О.О. G е свързан граф (иначе, разглеждаме всяка свързана компонента като отделен граф).

I. $X \subseteq V$ е антиклика $\implies V \setminus X$ е покриване

X е антиклика $\implies \forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 : (x_1, x_2) \notin E$.

Нека $W = \{v \in V : \exists x \in X, (v, x) \in E\}$. Понеже X е антиклика, то $\forall v \in W : v \in V \setminus X$.

Следователно $V \setminus X$ е покриване.

II. $V \setminus X$ е покриване $\implies X \subseteq V$ е антиклика

$V \setminus X$ е покриване $\implies \forall (u,v) \in E : u \in V \setminus X \vee v \in V \setminus X$.

Ако за произволни $x_1, x_2 \in X$ съществува $(x_1, x_2) \in E$, то $x_1, x_2 \notin V \setminus X \equiv x_1 \notin V \setminus X \wedge x_2 \notin V \setminus X$.

Обаче по предположение, трябва $x_1 \in V \setminus X \vee x_2 \in V \setminus X$, противоречие!

Следователно, X е антиклика.

Задача 4 **Решение:** Допускаме противното, тоест че съществува мост и всички върхове са от четна степен. Б.О.О. нека този мост да бъде $e \in E(G)$ с краища $m_1, m_2 \in V(G)$ и нека компонентите на $G - e$ да са C_1 и C_2.

Понеже в G степените на m_1 и m_2 са четни, то в $G - e$ те ще са нечетни.

Разглеждаме C_1 като самостоятелен граф. Сумата на степените ще бъде нечетно число (заради единствената нечетна степен на m_1), което противоречи на лемата "За всеки граф G, $\sum_{u \in V(G)} d(u) = 2m$". По конструкция $d(m_1)$ е нечетно, то тогава $\exists v_1 \in V(C_1), v_1 \neq m_1 : d(v_1)$ е нечетно.

Аналогично за C_2, $\exists v_2 \in V(C_2), v_2 \neq m_2 : d(v_2)$ е нечетно.

Стигаме до противоречие:

- Ако реброто $(v_1, v_2) \notin V(G)$, то тогава имаме върхове от нечетна степен в G.
- Ако реброто $(v_1, v_2) \in V(G)$, то тогава то ще е ребро между компонентите C_1 и C_2 и e няма да бъде мост.